ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	29 / 12 / 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 60 – 61.

Α2. (α) Σχολικό βιβλίο σελ. 41 **(β)** Σχολικό βιβλίο σελ. 60

Α3. (i) Λ **(ii)** Σ **(iii)** Σ **(iv)** Λ **(v)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (i) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

(ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=5\cdot 2\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3}=10\cdot\frac{1}{2}=5$.

(iii) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=\vec{\alpha}\left(\vec{\alpha}-5\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-5\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2-5\vec{\alpha}\vec{\beta}=5^2-5\cdot 5=25-25=0$.

Συνεπώς $\vec{\alpha}\perp\vec{u}$.

Β2. Έχουμε $|\vec{\gamma}|^2=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=$

$=5^2-2\cdot 5+2^2=19$. Οπότε $|\vec{\gamma}|^2=19 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|=\sqrt{19}$.

Β3. Είναι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=0 \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}-\lambda\vec{\beta}^2=0 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2+\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}-\lambda|\vec{\beta}|^2=0 \Leftrightarrow 5^2+5\lambda-5-\lambda\cdot 2^2=0 \Leftrightarrow 5\lambda-4\lambda=-25+5 \Leftrightarrow \lambda=-20$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι συντεταγμένες της κορυφής Α θα βρεθούν έπειτα από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων των ΑΒ και ΑΚ. Έχουμε λοιπόν:

$\begin{cases} x-y=-3 \\ 9x-y=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=3 \\ 9x-y=21 \end{cases}$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$8x=24 \Leftrightarrow x=3$. Άρα για x = 3 θα είναι $3-y=-3 \Leftrightarrow y=6$. Οπότε Α(3 , 6).

Γ2. (i) Η πλευρά ΒΓ είναι εκείνη η πλευρά του τριγώνου στην οποία καταλήγει το ύψος ΑΚ. Άρα θα είναι $AK\perp B\Gamma$, οπότε για τους συντελεστές διεύθυνσης λ_{AK} και $\lambda_{B\Gamma}$

θα ισχύει : $\lambda_{AK} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow 9 \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{9}$.

Άρα η εξίσωση της πλευράς ΒΓ είναι:

$$y-1=-\frac{1}{9}(x-8) \Leftrightarrow 9y-9=-(x-8) \Leftrightarrow x+9y=17.$$

(ii) Οι συντεταγμένες της κορυφής Β θα βρεθούν έπειτα από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων των ΑΒ και ΒΓ. Έχουμε λοιπόν:

$\begin{cases} x-y=-3 \\ x+9y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=3 \\ x+9y=17 \end{cases}$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$10y=20 \Leftrightarrow y=2$. Άρα για $y=2$ θα είναι $x-2=-3 \Leftrightarrow x=-1$.

Οπότε Β(–1 , 2).

Γ3. Η μεσοκάθετος μ_1 της πλευράς ΒΓ θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ΑΚ, εφόσον και η μ_1 και η ΑΚ είναι κάθετες στην ΒΓ. Άρα $\lambda_{\mu_1}=9$.

Το μέσο της ΒΓ , από το οποίο διέρχεται η μεσοκάθετος, είναι το σημείο

$M\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2}, \frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$, δηλαδή το $M\left(\frac{8-1}{2}, \frac{1+2}{2}\right)$ ή $M\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου μ_1 της ΒΓ είναι:

$$\mu_1:\ y-\frac{3}{2}=9\left(x-\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow 2y-3=18\left(x-\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow 2y-3=18x-63$$

$$\Leftrightarrow 18x-2y=60 \Leftrightarrow 9x-y=30.$$

Γ4. Η πλευρά ΑΓ βρίσκεται πάνω σε ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης:

$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A} \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}=\frac{1-6}{8-3} \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}=-1$. Όμως είναι $\lambda_{AB}=1$, οπότε παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1$. Άρα θα είναι $AB \perp A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή την $\hat{A}$.

<u>Β ΤΡΟΠΟΣ</u>:

Από τον τύπο της απόστασης δύο σημείων, διαπιστώνουμε ότι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι:

$$(AB)=\sqrt{(-1-3)^2+(2-6)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$

$$(A\Gamma)=\sqrt{(8-3)^2+(1-6)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$

$$(B\Gamma)=\sqrt{(8+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$$

Δηλαδή $(AB)^2+(A\Gamma)^2=\sqrt{32}^2+\sqrt{50}^2=32+50=82=\sqrt{82}^2=(B\Gamma)^2$.

Εφόσον $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΒΓ, δηλαδή με ορθή γωνία την $\hat{A}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση (1) για να παριστάνει ευθεία γραμμή θα πρέπει να μην μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές των x και y.

Το $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2, ενώ το $1-\lambda$ μηδενίζεται για $\lambda = 1$. Οπότε τελικά πρέπει $\lambda \neq 1$.

Δ2. Θεωρούμε 2 τιμές του λ, έστω $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$ και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν:

Για λ = 0 προκύπτει η ευθεία με εξίσωση: $2x + y = 0$.

Για λ = 2 προκύπτει η ευθεία με εξίσωση: $0x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

Άρα $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Οπότε, οι 2 ευθείες τέμνονται στο σημείο $(1, -2)$.

Η (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου αυτού αφού:

$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)1 + (1 - \lambda)(-2) - \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2 + 2\lambda - \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \; 0 = 0$ (ισχύει).

Άρα, όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από το σημείο $K(1, -2)$.

Δ3. Ισοδύναμα η (2) γίνεται:

$x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1-y)(x+1+y) = 0$

$\Leftrightarrow x+1-y = 0$ ή $x+1+y = 0$.

Άρα η εξίσωση (2) παριστάνει δύο ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: x - y = -1$ και $\varepsilon_2: x + y = -1$, οι οποίες έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ αντίστοιχα, άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, οπότε είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύνοντας το μεταξύ τους σύστημα παρατηρούμε ότι :

$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + x = -1 \\ y = -1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ y = -1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$, δηλαδή οι 2 ευθείες τέμνονται κάθετα στο σημείο $(-1, 0)$, δηλαδή πάνω στον άξονα x'x.

Δ4. Εφόσον το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε_1, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, οπότε για $x=-1$ και $y=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+1$ θα είναι :

$-1-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+1\right)=-1 \Leftrightarrow -\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$ (3).

Όμως επιπλέον το σημείο Κ είναι το μέσο του ΟΛ, άρα θα είναι:

$$\frac{x_O+x_\Lambda}{2}=x_K \Leftrightarrow \frac{0+\sqrt{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ (4) και $\frac{y_O+y_\Lambda}{2}=y_K \Leftrightarrow \frac{0-4}{2}=-2 \Leftrightarrow -4=-4$, που ισχύει.

Από (3) και (4) , διαπιστώνουμε ότι για την γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα ισχύει:

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

. Άρα τελικά $\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)=\frac{3\pi}{4}$.